04. Наћи рјешење једначине

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 4u$$
$$u(x,0) = \varphi(x)$$
$$u_y(x,0) = \psi(x)$$

при чему су $\varphi, \psi \in C^1(\mathbb{R})$

Рјешење:

$$\left.\begin{matrix} a=1 \\ b=-1 \\ c=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta = b^2 - ac = 0 \Rightarrow$$ једначина је параболичког типа

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} = -1$$
$$dy = -dx$$
$$y = -x + c$$
$$x + y = c = \xi$$

Бирамо функцију $\psi(x,y)$ такву да смјена $\xi = x+y, \eta = \psi(x,y$
буде регуларна. Узмимо $\psi(x,y) = y$

Дакле, смјена је $\xi = x+y, \eta = y$

Провјеримо да ли је смјена регуларна.

$$\xi_x = 1, \quad \xi_y = 1$$
$$\eta_x = 0, \quad \eta_y = 1$$

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$$ Смјена је регуларна.

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi$$
$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi + u_\eta$$
$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \xi_x + u_{\xi\eta} \eta_x = u_{\xi\xi}$$
$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \xi_y + u_{\xi\eta} \eta_y = u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}$$
$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \xi_y + u_{\xi\eta} \eta_y + u_{\eta\xi} \xi_y + u_{\eta\eta} \eta_y = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

тавањем у почетну једначину добијамо

$$\cancel{u_{\xi\xi}} - \cancel{2u_{\xi\xi}} - \cancel{2u_{\xi\eta}} + \cancel{u_{\xi\xi}} + \cancel{2u_{\xi\eta}} + u_{\eta\eta} = 4u$$

$$u_{\eta\eta} - 4u = 0$$

Нека је $u(\xi,\eta) = \vartheta(\eta)$. Једначина постаје:

$$\vartheta'' - 4\vartheta = 0$$

Карактеристична једначина је

$$k^2 - 4 = 0$$
$$k^2 = 4$$
$$k = \pm 2$$

Опште рјешење је дато са

$$\vartheta(\eta) = c_1 e^{2\eta} + c_2 e^{-2\eta}$$

па је

$$u(\xi,\eta) = c_1(\xi) e^{2\eta} + c_2(\xi) e^{-2\eta}$$

односно

$$u(x,y) = c_1(x+y) e^{2y} + c_2(x+y) e^{-2y}$$

а

$$u_y(x,y) = c_1'(x+y) e^{2y} + 2c_1(x+y) e^{2y} + c_2'(x+y) e^{-2y} - 2c_2(x+y) e^{-2y}$$

Како је

$$u(x,0) = \varphi(x)$$
$$u_y(x,0) = \psi(x)$$

добијамо

$$c_1(x) + c_2(x) = \varphi(x)$$
$$c_1'(x) + 2c_1(x) + c_2'(x) - 2c_2(x) = \psi(x)$$

Ријешимо добијени систем.

$$\varphi'(x) = c_1'(x) + c_2'(x) \Rightarrow 2c_1(x) - 2c_2(x) = \psi(x) - \varphi'(x)$$

(1) $c_1(x) - c_2(x) = \dfrac{\psi(x) - \varphi'(x)}{2}$

(2) $c_1(x) + c_2(x) = \varphi(x)$

$(1)+(2) \Rightarrow 2c_1(x)=\varphi(x)+\frac{\psi(x)-\varphi'(x)}{2} \Rightarrow c_1(x)=\frac{\varphi(x)}{2}+\frac{\psi(x)-\varphi'(x)}{4}$

$(2)-(1) \Rightarrow 2c_2(x)=\varphi(x)-\frac{\psi(x)-\varphi'(x)}{2} \Rightarrow c_2(x)=\frac{\varphi(x)}{2}-\frac{\psi(x)-\varphi'(x)}{4}$

Дакле,

$$u(x,y)=\left(\frac{\varphi(x+y)}{2}+\frac{\psi(x+y)-\varphi'(x+y)}{4}\right)e^{2y}+\left(\frac{\varphi(x+y)}{2}-\frac{\varphi(x+y)-\varphi'(x+y)}{4}\right)e^{-2y}$$

5. Свести на канонски облик једначину:

$$u_{xx}+xy\,u_{yy}=0$$

Рјешење:

$$\left.\begin{array}{l} a=1 \\ b=0 \\ c=xy \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta=b^2-ac=-xy$$

I За $xy=0$ $(x=0 \vee y=0)$ једначина је параболичког типа

II За $xy>0$ (I или III квадрант) једначина је елиптичког типа

III За $xy<0$ (II или IV квадрант) једначина је хиперболичког типа

I a) $x=0$

Једначина постаје

$u_{xx}=0 \Rightarrow u_x=c(y) \Rightarrow u=c(y)x+f(y),\quad c,f\in C(\mathbb{R})$

б) $y=0$

Једначина постаје

$u_{xx}=0 \Rightarrow u_x=c(y) \Rightarrow u=c(y)x+f(y),\quad c,f\in C(\mathbb{R})$

II a) $x>0,\ y>0$

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{-xy}=\pm i\sqrt{xy}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y}}=\pm i\sqrt{x}\,dx$$

$$2\sqrt{y}=\pm i\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c$$

$$c=2\sqrt{y}\pm i\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}$$

За смјену узимамо $\xi=2\sqrt{y},\ \eta=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

мо да ли је смјена регуларна.

$0, \ \xi_y = \frac{1}{\sqrt{y}}$

$\eta_x = \sqrt{x}, \ \eta_y = 0$

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \\ \sqrt{x} & 0 \end{vmatrix} = \sqrt{\frac{x}{y}} \neq 0$$ за $x>0, y>0 \Rightarrow$ Смјена је регуларна

$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = \sqrt{x}\, u_\eta$

$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = \frac{1}{\sqrt{y}} u_\xi$

$u_{xx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} u_\eta + \sqrt{x} \left(u_{\eta\xi} \xi_x + u_{\eta\eta} \eta_x\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}} u_\eta + x u_{\eta\eta}$

$u_{yy} = -\frac{1}{2} y^{-\frac{3}{2}} u_\xi + \frac{1}{\sqrt{y}} \left(u_{\xi\xi} \xi_y + u_{\xi\eta} \eta_y\right) = -\frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}} u_\xi + \frac{1}{y} u_{\xi\xi}$

Уврштавањем у почетну једначину добијамо

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} u_\eta + x u_{\eta\eta} - \frac{x}{2\sqrt{y}} u_\xi + x u_{\xi\xi} = 0 \quad / \cdot \frac{1}{x}$$

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - \frac{1}{2\sqrt{y}} u_\xi + \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} u_\eta = 0$$

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - \frac{u_\xi}{\xi} + \frac{u_\eta}{3\eta} = 0$$

д) $x<0, y<0$

$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{-xy} = \pm i\sqrt{xy}$

$\frac{dy}{\sqrt{-y}} = \pm i \sqrt{-x}\, dx$

$-2\sqrt{-y} = \pm i \cdot \frac{2}{3} (-x)^{\frac{3}{2}} + c$

$c = 2\sqrt{-y} \pm i \cdot \frac{2}{3} (-x)^{\frac{3}{2}}$

За смјену узмимо $\xi = 2\sqrt{-y}, \ \eta = \frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}$

Провјеримо да ли је смјена регуларна.

$\xi_x = 0, \ \xi_y = -\frac{1}{\sqrt{-y}}$

$\eta_x = -\sqrt{-x}, \ \eta_y = 0$

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{-y}} \\ -\sqrt{-x} & 0 \end{vmatrix} = -\sqrt{\frac{x}{y}} \neq 0$$ за $x<0, y<0 \Rightarrow$ Смјена је регула

$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = -\frac{1}{\sqrt{-y}} u_\xi$

$u_{xx} = \frac{1}{2\sqrt{-x}} u_\eta - \sqrt{-x}\,(u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} u_\eta - x u_{\eta\eta}$

$u_{yy} = -\frac{1}{2(-y)^{\frac{3}{2}}} u_\xi - \frac{1}{\sqrt{-y}}\left(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y\right) = \frac{-1}{2(-y)^{\frac{3}{2}}} u_\xi - \frac{1}{y} u_{\xi\xi}$

Уврштавањем у почетну једначину добијамо:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} u_\eta - x u_{\eta\eta} + \frac{x}{2\sqrt{-y}} u_\xi - x u_{\xi\xi} = 0 \quad /\cdot\left(\frac{-1}{x}\right)$$

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{u_\eta}{2(-x)^{\frac{3}{2}}} - \frac{u_\xi}{2\sqrt{-y}} = 0$$

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - \frac{u_\xi}{\xi} + \frac{u_\eta}{3\eta} = 0$$

III a) $x>0,\ y<0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pm\sqrt{-xy}}{1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x}\sqrt{-y} \quad \land \quad \frac{dy}{dx} = -\sqrt{x}\sqrt{-y}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{-y}} = \sqrt{x}\,dx \qquad \frac{dy}{\sqrt{-y}} = -\sqrt{x}\,dx$$

$$-2\sqrt{-y} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c \qquad -2\sqrt{-y} = -\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\xi = c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{-y} \qquad \eta = c = -\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{-y}$$

Провјеримо да ли је смјена регуларна

$\xi_x = \sqrt{x}, \quad \xi_y = \frac{-1}{\sqrt{-y}}$

$\eta_x = -\sqrt{x}, \quad \eta_y = \frac{-1}{\sqrt{-y}}$

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \sqrt{x} & -\frac{1}{\sqrt{-y}} \\ -\sqrt{x} & -\frac{1}{\sqrt{-y}} \end{vmatrix} = -2\sqrt{\frac{-x}{y}} \neq 0$$ за $x>0, y<0 \Rightarrow$ Смјена је регуларна.

$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = \sqrt{x}\,u_\xi - \sqrt{x}\,u_\eta$

$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = -\frac{1}{\sqrt{-y}} u_\xi - \frac{1}{\sqrt{-y}} u_\eta$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}u_\xi + \sqrt{x}\left(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x\right) - \frac{1}{2\sqrt{x}}u_\eta - \sqrt{x}\left(u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x\right) =$$

$$= x u_{\xi\xi} - 2x u_{\xi\eta} + x u_{\eta\eta} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(u_\xi - u_\eta\right)$$

$$u_{yy} = -\frac{1}{2(-y)^{\frac{3}{2}}}u_\xi - \frac{1}{\sqrt{-y}}\left(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y\right) - \frac{1}{2(-y)^{\frac{3}{2}}}u_\eta - \frac{1}{\sqrt{-y}}\left(u_{\eta\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y\right) =$$

$$= \frac{-1}{y}u_{\xi\xi} - \frac{2}{y}u_{\xi\eta} - \frac{1}{y}u_{\eta\eta} - \frac{1}{2(-y)^{\frac{3}{2}}}\left(u_\xi + u_\eta\right)$$

Уврштавањем у почетну једначину добијамо:

$$\cancel{x u_{\xi\xi}} - 2x u_{\xi\eta} + \cancel{x u_{\eta\eta}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(u_\xi - u_\eta\right) - \cancel{x u_{\xi\xi}} - 2x u_{\xi\eta} - \cancel{x u_{\eta\eta}} + \frac{x}{2\sqrt{-y}}\left(u_\xi + u_\eta\right)$$

$$-4x u_{\xi\eta} + u_\xi\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{x}{2\sqrt{-y}}\right) + u_\eta\left(\frac{x}{2\sqrt{-y}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = 0 \;/\; \left(\frac{-1}{4x}\right)$$

Изразимо x и y преко ξ и η

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{-y} \\ \eta &= -\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{-y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sqrt{-y} = \frac{\xi+\eta}{4}, \quad x^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{4}(\xi - \eta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \left(\frac{3}{4}(\xi - \eta)\right)^{\frac{2}{3}}$$

Добијамо

$$u_{\xi\eta} - u_\xi\left(\frac{1}{8x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{8\sqrt{-y}}\right) - u_\eta\left(\frac{1}{8\sqrt{-y}} - \frac{1}{8x^{\frac{3}{2}}}\right) = 0$$

$$u_{\xi\eta} - u_\xi\left(\frac{1}{6(\xi-\eta)} + \frac{1}{2(\xi+\eta)}\right) - u_\eta\left(\frac{1}{2(\xi+\eta)} - \frac{1}{6(\xi-\eta)}\right) = 0$$

д) $x < 0, y > 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pm\sqrt{xy}}{1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{-x}\sqrt{y}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \sqrt{-x}\,dx$$

$$2\sqrt{y} = -\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\xi = \frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{y}$$

$\wedge$

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{-x}\sqrt{y}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = -\sqrt{-x}\,dx$$

$$2\sqrt{y} = \frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\eta = -\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{y}$$

Провјеримо да ли је смјена регуларна:

$$\xi_x = -\sqrt{-x} \quad , \quad \xi_y = \frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$\eta_x = \sqrt{-x} \quad , \quad \eta_y = \frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} -\sqrt{-x} & \frac{1}{\sqrt{y}} \\ \sqrt{-x} & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{vmatrix} = -2\sqrt{\frac{-x}{y}} \neq 0$$ за $x<0, y>0 \Rightarrow$ Смјена је регуларна.

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = -\sqrt{-x}\, u_\xi + \sqrt{-x}\, u_\eta$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = \frac{1}{\sqrt{y}} u_\xi + \frac{1}{\sqrt{y}} u_\eta$$

$$u_{xx} = \frac{1}{2\sqrt{-x}} u_\xi - \sqrt{-x}(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x) - \frac{1}{2\sqrt{-x}} u_\eta + \sqrt{-x}(u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x) =$$

$$= -x u_{\xi\xi} + 2x u_{\xi\eta} - x u_{\eta\eta} + \frac{1}{2\sqrt{-x}}(u_\xi - u_\eta)$$

$$u_{yy} = \frac{-1}{2y^{\frac{3}{2}}} u_\xi + \frac{1}{\sqrt{y}}(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y) - \frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}} u_\eta + \frac{1}{\sqrt{y}}(u_{\eta\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y) =$$

$$= \frac{1}{y} u_{\xi\xi} + \frac{2}{y} u_{\xi\eta} + \frac{1}{y} u_{\eta\eta} - \frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}}(u_\xi + u_\eta)$$

Уврштавањем у почетну једначину добијамо:

$$-\cancel{x u_{\xi\xi}} + 2x u_{\xi\eta} - \cancel{x u_{\eta\eta}} + \frac{1}{2\sqrt{-x}}(u_\xi - u_\eta) + \cancel{x u_{\xi\xi}} + 2x u_{\xi\eta} + \cancel{x u_{\eta\eta}} - \frac{x}{2\sqrt{y}}(u_\xi + u_\eta) = 0$$

$$4x u_{\xi\eta} + u_\xi\left(\frac{1}{2\sqrt{-x}} - \frac{x}{2\sqrt{y}}\right) + u_\eta\left(\frac{-1}{2\sqrt{-x}} - \frac{x}{2\sqrt{y}}\right) = 0 \,/\cdot \frac{1}{4x}$$

$$u_{\xi\eta} + u_\xi\left(\frac{-1}{8(-x)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2\sqrt{y}}\right) + u_\eta\left(\frac{1}{8(-x)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{8\sqrt{y}}\right) = 0$$

Изразимо x и y преко ξ и η.

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{y} \\ \eta &= \left(-\frac{2}{3}\right)(-x)^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sqrt{y} = \frac{\xi+\eta}{4} \quad , \quad (-x)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{4}(\xi - \eta)$$

Добијамо:

$$u_{\xi\eta} + u_\xi\left(\frac{1}{6(\xi-\eta)} + \frac{1}{2(\xi+\eta)}\right) + u_\eta\left(\frac{1}{6(\xi-\eta)} - \frac{1}{2(\xi+\eta)}\right) = 0$$

IV ~~Вјежбе~~

Парцијалне диференцијалне једначине

1. Наћи рјешење Кошијевог задатка

$$4y^2u_{xx}-2(1-y^2)u_{xy}-u_{yy}+\frac{2y}{1+y^2}(2u_x+u_y)=0$$

$$u(x,0)=\varphi_0(x),\ u_y(x,0)=\varphi_1(x)$$

Рјешење:

$$\left.\begin{array}{l} a=4y^2 \\ b=y^2-1 \\ c=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta=b^2-ac=(y^2-1)^2+4y^2=y^4-2y^2+1+4y^2=y^4+2y^2+1=(y^2+1)^2>0\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ једначина је хиперболичког типа

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-1\pm\sqrt{(y^2+1)^2}}{4y^2}=\frac{y^2-1\pm(y^2+1)}{4y^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2} \qquad \wedge \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{-1}{2y^2}$$

$$2dy=dx \qquad\qquad 2y^2dy=-dx$$

$$2y=x+c \qquad\qquad \frac{2}{3}y^3=-x+c$$

$$\xi=c=x-2y \qquad\qquad \eta=c=\frac{2}{3}y^3+x$$

Провјеримо регуларност смјене.

$$\xi_x=1,\quad \xi_y=-2$$

$$\eta_x=1,\quad \eta_y=2y^2$$

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 2y^2\end{vmatrix}=2y^2+2\neq0$$ $\Rightarrow$ Смјена је регуларна.

$$u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x=u_\xi+u_\eta$$

$$u_y=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y=-2u_\xi+2y^2u_\eta$$

$$u_{xx}=u_{\xi\xi}\xi_x+u_{\xi\eta}\eta_x+u_{\eta\xi}\xi_x+u_{\eta\eta}\eta_x=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}$$

$$u_{xy}=u_{\xi\xi}\xi_y+u_{\xi\eta}\eta_y+u_{\eta\xi}\xi_y+u_{\eta\eta}\eta_y=-2u_{\xi\xi}+(2y^2-2)u_{\xi\eta}+2y^2u_{\eta\eta}$$

$$u_{yy}=-2(u_{\xi\xi}\xi_y+u_{\xi\eta}\eta_y)+4yu_\eta+2y^2(u_{\eta\xi}\xi_y+u_{\eta\eta}\eta_y)=$$

$$=4u_{\xi\xi}-8y^2u_{\xi\eta}+4y^4u_{\eta\eta}+4yu_\eta$$

Уврштавањем у почетну једначину добијамо

$$4y^2u_{\xi\xi}+8y^2u_{\xi\eta}+4y^2u_{\eta\eta}+4(1-y^2)u_{\xi\xi}+4(1-y^2)^2u_{\xi\eta}-4y^2(1-y^2)u_{\eta\eta}-$$

$$-4u_{\xi\xi}+8y^2u_{\xi\eta}-4y^4u_{\eta\eta}-4yu_\eta+\frac{2y}{1+y^2}(\cancel{2u_\xi}+2u_\eta\cancel{-2u_\xi}+2y^2u_\eta)=0$$

$$u_{\xi\xi}(\cancel{4y^2}\cancel{+4}\cancel{-4y^2}\cancel{-4})+u_{\xi\eta}(8y^2+4(1-2y^2+y^4)+8y^2)+u_{\eta\eta}(\cancel{4y^2}\cancel{-4y^2}+4y^4-4y^4$$

$$\cancel{-4yu_\eta}+\frac{2y}{\cancel{1+y^2}}2u_\eta(\cancel{1+y^2})=0$$

$$\cancel{-4yu_\eta}+4u_{\xi\eta}(1+2y^2+y^4)+4yu_\eta=0 \quad /\cdot\frac{1}{4}$$

$$\cancel{-yu_\eta}+(1+y^2)^2u_{\xi\eta}\cancel{+yu_\eta}=0$$

$$(1+y^2)^2u_{\xi\eta}=0$$

$$u_{\xi\eta}=0$$

$$u_\xi=c(\xi)$$

$$u=c_1(\xi)+c_2(\eta)\quad, c_1,c_2\in C^1(\mathbb{R})$$

$$u(x,y)=c_1(x-2y)+c_2(x+\frac{2}{3}y^3)$$

Даље је:

$$u_y(x,0)=-2c_1'(x-2y)+y^2c_2'(x+\frac{2}{3}y^3)$$

Из почетних услова имамо:

$$u(x,0)=c_1(x)+c_2(x)=\varphi_0(x)$$

$$u_y(x,0)=-2c_1'(x)=\varphi_1(x)\Rightarrow c_1'(x)=-\frac{\varphi_1(x)}{2}$$

$$c_1(x)=-\int\frac{\varphi_1(x)}{2}dx$$

$$c_2(x)=\varphi_0+c_1(x)=\varphi_0(x)+\int\frac{\varphi_1(x)}{2}dx$$

Дакле, $u(x,y)=-\int\frac{\varphi_1(x-2y)}{2}d(x-2y)+\varphi_0(x+\frac{2}{3}y^3)+\int\frac{\varphi_1(x+\frac{2}{3}y^3)}{2}d(x+\frac{2}{3}y^3)$ је решење датог Кошијевог задатка.